Analyse du cycle de Stirling convenant aux VRAIS moteurs.

Le but de cette étude est de fournir un instrument de travail mathématique aux développeurs de moteurs Stirling. Par définition, il résulte de ces développement des réalisations imparfaites. Le moteur contient des volumes morts incontournables et il est équipé de régénérateurs dont l'efficacité varie de 0 à 99%. Habituellement, la littérature propose des théories supposant une absence de volumes morts et la perfection impossible du régénérateur. Parfois ces anomalies constructives sont traitées séparément. Schmidt suppose des volumes morts sans tenir compte du régénérateur et Martini explore le régénérateur en tenant compte des volumes morts, seulement à partir du moment ou le régénérateur atteint une efficacité de 50% la moyenne logarithmique des températures à ces extrémités est infinie. La moyenne arithmétique de ces deux températures donne une bonne approximation, c'est donc cette approche que j'utilise dans ce document. Nous allons maintenant analyser ce moteur imparfait en nous appuyant sur les lois de la thermodynamique classique et extraire des règles importantes qui nous guiderons dans l'étude de notre futur moteur en contribuant ainsi à fournir l'énergie de demain.

Serge Klutchenko

Symboles utilisés :

Préfixes et suffixes

Q représente l'énergie thermique, exprimée en Joules
V représente un volume exprimé en mètres cubes.
T représente une température exprimée en Kelvin.
W représente un travail exprimé en Joule.
P représente une valeur de pression exprimée en Newton par m²

Les suffixes numériques sont utilisés dans les équations d'état. Ils font référence au diagramme **p-v** de la figure 2. Par exemple T_3 correspond à la température la plus chaude du moteur alors que T_1 correspond à la plus froide. Dans le même esprit V_3 *et* V_1 réfèrent aux volumes correspondants.

Les suffixes numériques exprimés sous la forme 1-2, 2-3, 3-4 etc.. sont utilisés pour exprimer des transitions d'états.

Les suffixes c, r et f concernent respectivement l'espace chaud, le régénérateur, et l'espace froid.

J'ai parfois, pour des raisons de clarté, ajouté ces suffixes dans les formules. Par exemple pour des expressions telles que V_{C3} *et* V_{C4} il faut lire Volume chaud sur le point 3 du diagramme et Volume chaud sur le point 4.

L'ensemble des autres symboles utilisés est donné dans le tableau suivant. (Attention à K et k)

C_V	Chaleur spécifique à volume constant (J/Kg K)
e	Efficacité du régénérateur.
E_t	Efficacité thermique du moteur Stirling.
K	Facteur défini par l'équation (9)
k	Rapport de chaleur spécifique.
k_{Mc}	$\frac{V_{Mc}}{V_{MT}}$ Rapport du volume mort « chaud » sur le volume mort total.
k_{Mr}	$\frac{V_{Mr}}{V_{MT}}$ Rapport du volume mort contenu dans le régénérateur.
k_{Mf}	$\frac{V_{Mf}}{V_{MT}}$ Rapport du volume mort « froid » sur le volume mort total.
k_{MT}	$\frac{V_{MT}}{V_T}$ Rapport des volumes morts sur le volume total.
k_{MDP}	$\frac{V_{MT}}{V_D+V_P}$ Rapport des volumes morts sur les volumes balayés.
m	Masse totale du fluide contenu dans le moteur (Kg).
p	Pression absolue (N/m²).
p_m	Pression moyenne effective du cycle complet (N/m²)
Q_e	Chaleur totale ajoutée depuis une source extérieure (Joules).
Q_s	Chaleur rejetée vers l'extérieur par le cycle.
R	Constante du gaz de travail (J/kg K)
T_3	Température du gaz de travail dans l'espace chaud. (K)
T_3'	Température du gaz de travail à la sortie du régénérateur. (K)
T_1	Température du gaz de travail dans l'espace froid. (K)
T_1'	Température du gaz de travail à l'entrée du régénérateur.(K)
T_R	Température du gaz de travail contenu dans le régénérateur.(K)
T_F	Température du refroidisseur. (K)
T_C	Température du réchauffeur. (K)
V_T	Volume total du gaz de travail contenu dans le moteur. (m^3)
V_{Mc}	Volume mort chaud (réchauffeur, liaisons, cylindre) (m^3)
V_{Mf}	Volume mort froid (refroidisseur, liaisons, cylindre) (m^3)
V_{Mr}	Volume mort du régénérateur.(m^3)
V_{MT}	Total des volumes morts. (m^3)
V_D	Volume balayé par le déplaceur. (m^3)
V_P	Volume balayé par le piston de travail (m^3)
W_{net}	Puissance nette du moteur. (Joules)

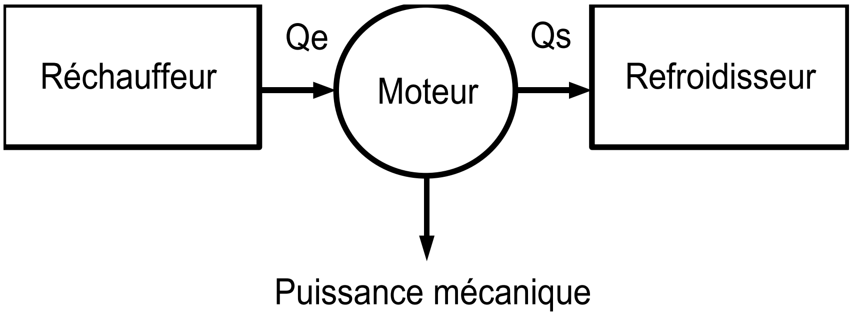

Figure 1:

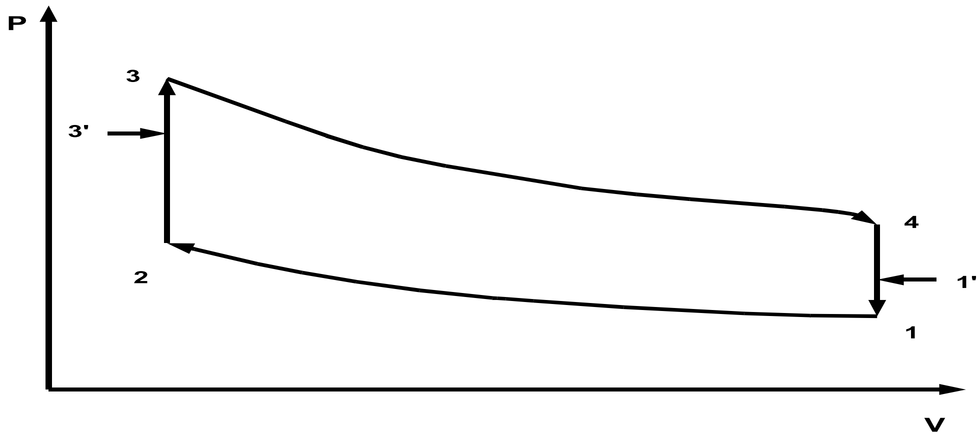

Figure 2: Diagrame pression volume

La figure 1 représente un schéma simplifié d'un moteur stirling équipé d'un régénérateur imparfait. Son diagramme **p-v** est représenté sur la figure 2.

Pour une régénération idéale, la chaleur totale rejetée pendant la transformation 4-1 serait absorbée par un régénérateur parfait et rendue au fluide de travail pendant la transformation 2-3. Autrement dit, ce régénérateur parfait aurait une surface infinie ou bien il serait nécessaire de disposer d'un temps de régénération infini.

Pour un régénérateur imparfait, la température du fluide de travail à l'entrée et à la sortie du régénérateur correspond à T1' et T3' respectivement. Des échangeurs externes doivent alors augmenter la température de T3' à T3 et la diminuer de T1' vers T1. Le développeur de moteur Stirling doit pouvoir évaluer l'efficacité de son régénérateur et d'analyser cette imperfection pour calculer le rendement final de sa réalisation.

Le volume mort correspond à la somme des volumes du fluide de travail contenus dans les échangeurs, le régénérateur ainsi que dans les raccordements entre ces différents éléments. Il est évident qu'un moteur Stirling contient des volumes morts irréductibles. En pratique, on trouve des moteurs avec un volume mort représentant 58% du volume total.

Analyse du cycle de Stirling.

Les volumes morts.

Disons que les volumes morts contenus dans le réchauffeur,le régénérateur et le refroidisseur sont exprimés en mètres cubes et sont respectivement exprimés par V_{Mc} , V_{Mr} *et* V_{Mf} alors le volume mort total s'exprime par:

$$V_{MT}=V_{Mc}+V_{Mr}+V_{Mf} \;=\; (k_{Mc}+k_{Mr}+k_{Mf})V_{MT} \qquad (1)$$

ou

$k_{Mc}=\dfrac{V_{Mc}}{V_{MT}}$ représente le rapport du volume mort chaud sur le volume mort total , $k_{Mr}=\dfrac{V_{Mr}}{V_{MT}}$ représente le rapport du volume mort du régénérateur sur le volume mort total et $k_{Mf}=\dfrac{V_{Mf}}{V_{MT}}$ qui est le rapport du volume mort froid sur le volume mort total.

Représentons maintenant le rapport entre le total des volumes morts et le volume total de gaz contenu dans le moteur par $k_{MT}=\dfrac{V_{MT}}{V_T}$ alors le total des volumes morts peut être exprimé sous la forme:

$$V_{MT}=k_{MT}\ V_T \;=\; k_{MT}(V_{MT}+V_D+V_P) \qquad (2)$$

ou V_D *et* V_P représentent les volumes en mètres cubes déplacés par le piston déplaceur et le piston de travail.

Le volume mort d'un moteur stirling est souvent exprimé en référence au volumes total de gaz déplacé, cela nous donne alors:

$$V_{MT}=k_{MDP}(V_D+V_P) \qquad (3)$$

En conséquence le rapport du volume mort sur le volume total est celui du volume mort sur le total des volumes balayés. Il est exprimé par:

$$k_{MT}=\frac{k_{MDP}}{1+k_{MDP}} \quad ou \quad k_{MDP}=\frac{k_{MT}}{1-k_{MT}} \qquad (4)$$

Le régénérateur imparfait.

L'efficacité du régénérateur **e** est exprimé de la manière suivante:

$$e=\frac{(T_3'-T_1)}{(T_3-T_1)} \qquad (5)$$

La valeur de **e** est de 1 pour 100% d'efficacité, cela correspond à une régénération idéale. Une valeur de zéro correspond à une absence totale de régénérateur ou pire, à une efficacité de 0%. La température du gaz de travail à la sortie du régénérateur peut être calculée à partir de l'efficacité de celui-ci. Cela nous donne alors:

$$T_3'=T_1+e(T_3-T_1) \qquad (5a)$$

Pour un régénérateur ayant une même efficacité de chauffage et de refroidissement: $Q_{2-3'}=Q_{4-1'}$ la température du gaz de travail à l'entrée sera:

$$T_1'=T_3+e(T_1-T3) \;=\; T_3-e(T_3-T_1) \qquad (6)$$

Pour un moteur Stirling contenant un volume mort notable, il est important d'avoir une température correcte du fluide de travail au niveau du régénérateur. La température effective du gaz contenu dans le volume mort du régénérateur peut être déterminé par une simple moyenne arithmétique:

$$T_R=\frac{T_3'+T_1'}{2} \qquad (7)$$

En substituant l'équation (5a) et (6) en équation (7) cela donne:

$$T_R=\frac{T_3+T_1}{2} \qquad (7a)$$

Nous observons qu'en utilisant la moyenne arithmétique, la température effective du régénérateur devient indépendante de son efficacité.

Équations d'état:

Nous commençons par l'équation d'état correspondant à la transformation isotherme 1-2. Nous avons les espaces chaud et froid, respectivement V_c et V_f ou les températures du fluide de travail correspondent respectivement à T_3 et T_1 . Sans oublier la température du régénérateur : T_R . Dans cette équation nous tenons compte des volumes morts V_{Mc} , V_{Mf} et V_{Mr}
Cela nous donne:

$$p=\frac{mR}{\frac{V_c}{T_3}+\frac{V_{Mc}}{T_3}+\frac{V_{Mr}}{T_r}+\frac{V_{Mf}}{T_1}+\frac{V_f}{T_1}} = \frac{mR}{\frac{V_c}{T_3}+K+\frac{V_f}{T_1}} \qquad (8)$$

ou

$$K=\frac{V_{Mc}}{T_3}+\frac{V_{Mr}}{T_r}+\frac{V_{Mf}}{T_1} \qquad (9)$$

m correspond à la masse totale de gaz contenu dans le moteur (en kg).

En substituant l'équation (1) et (7a) dans l'équation (9) cela donne:

$$K=(\frac{k_{Mc}}{T_3}+\frac{2\,k_{Mr}}{T_3+T_1}+\frac{k_{Mf}}{T_1})V_{MT} \tag{9 a}$$

Il devient clair maintenant que pour des températures données du fluide de travail le facteur K est fonction des volumes morts.

La compression isotherme. (1-2)

Durant la transformation correspondant à la compression isotherme, le fluide de travail contenue dans l'espace froid est comprimé depuis $V_{f1}=V_D+V_P$ vers $V_{f2}=V_D$. V_{f1} *et* V_{f2} représentent les volumes correspondant aux positions 1 et 2 du diagramme **p-v** de la figure 2.
Donc la chaleur rejetée pendant la transformation isotherme 1-2 est:

$$\begin{aligned}
Q_{1-2}&=W_{1-2}=\int_{V_{f1}}^{V_{f2}} pdV_f \\
&= mRT_1 \int_{V_{f1}}^{V_{f2}} dV_f/(V_f+KT_1) \\
&= mRT_1 \ln(\frac{V_{f2}+KT_1}{V_{f1}+KT_1}) \\
&= mRT_1 \ln(\frac{V_D+KT_1}{V_D+V_P+KT_1}) \qquad (10)
\end{aligned}$$

Il est bon de noter que le travail de compression dépend seulement du facteur **K** , fonction des volumes morts.

Le chauffage isochore. (2-3)

En principe, la chaleur ajoutée durant le chauffage isochore (2-3) est:

$$\begin{aligned}
Q_{2-3}&=mC_V(T_3-T_2) \\
&= mC_V(T_3-T_1) \qquad (11)
\end{aligned}$$

ou C_V est la chaleur spécifique à volume constant (j/kg K) supposée être une constante. Sans régénérateur, cet apport de chaleur est obtenu depuis une source externe. Avec un régénérateur idéal, cet apport proviendrait uniquement de celui-ci.

La chaleur restituée par un régénérateur imparfait durant cette transformation est:

$$\begin{aligned}
Q_{2-3'}&=mC_V(T_3-T_{3'}) \\
&= emC_V(T_3-T_1) \qquad (12)
\end{aligned}$$

Donc la chaleur apportée par la source externe pendant 3'-3 devient:

$$Q_{3-3'} = mC_V(T_3 - T3')$$
$$= (1-e)mC_V(T_3 - T_1) \qquad (13)$$

On voit bien que pendant cette phase du cycle, la chaleur apportée dépend de l'efficacité du régénérateur seulement.

L'expansion isotherme (3- 4)

Durant la transformation isotherme (3-4) le volume chaud contenant le gaz de travail varie de $V_{C3} = V_D$ à $V_{C4} = V_D + V_P$ Le volume contenant le gaz froid V_f est supposé être à zéro. Pendant cette transformation, la chaleur apportée est:

$$Q_{3-4} = W_{3-4} = m\int_{V_{c3}}^{V_{c4}} pDV_c$$
$$= mRT_3 \int_{V_{c3}}^{V_{c4}} \frac{dV_c}{V_c + KT_3}$$
$$= mRT_3 \ln\left(\frac{V_{C4} + KT_3}{V_{C3} + KT_3}\right)$$
$$= mRT_3 \ln\left(\frac{V_D + V_P + KT_3}{V_D + KT_3}\right) \qquad (14)$$

Il est maintenant évident que le travail fourni est dépendant des volumes morts.

Le refroidissement isochore: (4-1)

La chaleur rejetée pendant la transformation isochore (4-1), phase de refroidissement du fluide est:

$$Q_{4-1} = mC_V(T_1 - T_4)$$
$$= -mC_V(T_3 - T_1) \qquad (15)$$

Sans régénérateur, cette chaleur est dissipée dans le refroidisseur. Avec un régénérateur parfait elle serait complètement absorbée par celui-ci. Avec une régénération imparfaite la chaleur absorbée par le régénérateur est alors exprimée par la formule suivante:

$$Q_{4-1'} = mC_V(T_{1'} - T_4)$$
$$= -emC_V(T_3 - T_1) \qquad (16)$$

La chaleur rejetée pendant la transformation 1-1' est alors:

$$Q_{1-1'} = mC_V(T_1 - T_{1'})$$
$$= -(1-e)mC_V(T3 - T1) \qquad (17)$$

Nous voyons ici que le transfert de chaleur pendant la phase de refroidissement dépend de l'efficacité du régénérateur.

Chaleur totale ajoutée.

Pour une régénération imparfaite, la chaleur totale ajoutée depuis une source extérieure dans le cycle est:

$$Q_e = Q_{3-3'} + Q_{3-4} \qquad (18)$$

Voyons cela plus en détails:

$$Q_e = mC_V((T_3 - T_{3'}) + (k-1)T_3 \ln \frac{(V_{c4} + KT_3)}{(V_{c3} + KT_3)})$$

$$= \; mC_V((1-e)(T_3 - T_1) + (k-1)T_3 \ln(\frac{(V_D + V_P + KT_3)}{V_D + KT_3})) \qquad (18\text{ a})$$

Il est bon de rappeler que **k** représente le rapport de chaleur spécifique. Il paraît maintenant évident que la chaleur totale introduite dans le moteur dépend de la qualité du régénérateur et de la quantité de volumes morts présente.
Sans régénération ou avec un régénérateur d'une efficacité nulle, la chaleur apportée au moteur depuis une source extérieure serait

$$Q_e = Q_{2-3} + Q_{3-4} \qquad (19)$$

Par contre, avec un régénérateur parfait, ce serait

$$Q_e = Q_{3-4} \qquad (20)$$

Chaleur totale rejetée vers l'extérieur.
Avec un régénérateur imparfait la chaleur extraite du cycle est

$$Q_s = Q_{1-1'} + Q_{1-2} \qquad (21)$$

cela donne:

$$Q_s = mC_V((T_1 - T_{1'}) + (k-1)T_1 \ln \frac{V_{f1} + KT_1}{V_{f2} + KT_1})$$

$$= \; mC_V((1-e)(T_3 - T_1) + (k-1)T_3 \ln \frac{V_D + V_P + KT_1}{V_D + KT_1}) \qquad (21\text{a})$$

Nous avons ici une forte ressemblance entre chaleur ajoutée et chaleur extraite. La dépendance de ces phénomènes à la qualité du régénérateur et de la présence de volumes morts devient indiscutable.

Sans aucune régénération cela donnerait:

$$Q_s = Q_{4-1} + Q_{1-2} \qquad (22)$$

alors qu'avec le régénérateur idéal ce serait:

$$Q_s = Q_{1-2} \qquad (23)$$

Il paraît évident qu'une symétrie de fonctionnement du régénérateur coté chaud et coté froid apparaît ici aussi comme indispensable.

Travail effectif.

Le surplus d'énergie des deux transformations isothermes 1-2 et 3-4 est transformé en travail mécanique utile. Ce travail, avec un moteur muni d'un régénérateur imparfait et comprenant des volumes morts peut être calculé comme ceci:

$$
\begin{aligned}
& W_{net}=\sum Q \\
= \quad & Q_e+Q_s \\
= \quad & Q_{3-3'}+Q_{3-4}+Q_{1-1'}+Q_{1-2} \\
= \quad & Q_{3-4}+Q_{1-2} \\
= \quad & mR\{T_3 \ln([\frac{V_{c4}+KT_3}{V_{c3}+KT_3}]-T_1 \ln([\frac{V_{f1}+KT_1}{V_{f2}+KT_1}]))\}
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

Il faut noter que V_{c4} (Volume chaud en position 4 sur le diagramme p-v) est égal à V_{f1} (isochore) donc égal à $V_D+V_P=V_T$. Et que $V_{c3}=V_{c2}=V_D=V_2$ on en déduit:

$$W_{net}=mR\{T_3 \ln([\frac{V_D+V_P+KT_3}{V_D+KT_3}]-T_1 \ln([\frac{V_D+V_P+KT_1}{V_D+KT_1}]))\} \qquad (24\text{ a})$$

Il est évident que le travail fourni par le cycle dépend des volumes morts. Si ils étaient réduit à néant cela nous donnerait ceci:

$$W_{net}=mR \ln(\frac{V_1}{V_2})(T_3-T_1) \qquad (25)$$

Cette équation est celle que l'on trouve dans les ouvrages de thermodynamique. Constatons aussi qu'en l'absence de volumes morts le travail fourni par le cycle est totalement indépendant de l'efficacité du régénérateur !

Pression effective moyenne.

Le travail mécanique peut être déterminé par la pression moyenne effective du cycle (P_m) et des changements de volumes qui se résument finalement au volume balayé par le piston de travail:

$$V_{c4}-V_{C3} = V_{f1}-V_{f2} = V_1-V_{V2} = V_p$$

cela donne :

$$W_{net}=P_m V_P \tag{26}$$

avec l'équation (24) cela donne:

$$P_m=(\frac{mR}{V_p})\{T_3 \ln\{\frac{V_D+V_P+KT_3}{V_D+KT_3}\}-T_1 \ln\{\frac{V_D+V_P+KT_1}{V_D+KT_1}\}\} \tag{27}$$

Notons encore que la pression effective dépend des volumes morts. Si il n'y en avait aucun, cela nous donnerait ceci,. en utilisant la loi des gaz parfaits ainsi qu'en se souvenant que $T_1=T_2$ *et que* $V_1=V_3$:

$$P_m=[\frac{((P_3-P_2)V_3)}{V_1-V_2}]\ln(\frac{V_1}{V_2})$$

$$= \frac{\frac{(P_3-P_2)}{V_1}}{V_{2-1}-1}\ln(\frac{V_1}{V_2}) \tag{28}$$

Une autre solution consiste à calculer la pression aux quatres « coins » du cycle et d'en faire la moyenne. Cette solution passe par le calcul de la densité du gaz par rapport au volume spécifique. C'est le principe adopté dans la mise en pratique exposée plus loin.

Efficacité thermique.

L' efficacité thermique d'un moteur Stirling E_t peut être vu sous la forme :

$$E_t = \frac{W_{net}}{Q_e} \qquad (29)$$

cela donne pour notre moteur imparfait:

$$E_t = \frac{\{T_3 \ln(\{\frac{V_D + V_P + KT_3}{V_D + KT_3}\}) - T_1 \ln(\{\frac{V_D + V_P + KT_1}{V_D + KT_1}\})\}}{\{T_3 \ln([\frac{V_D + V_P + KT_3}{V_D + KT_3}]) + (T_3 - T_1)\frac{1-e}{k-1}\}} \qquad (29\ a)$$

On remarque que l'efficacité thermique du moteur Stirling dépend à la fois de la qualité du régénérateur et de la proportion de volumes morts présents.

Sans volumes morts l'équation (29a) serait réduite à:

$$E_t = \frac{T_3 - T_1}{\frac{T_3 + (T_3 - T_1)}{(k-1)\ln\frac{V_1}{V_2}}} \qquad (30)$$

Même lorsque une notation différente est employée comme dans l'équation (30), les résultats sont identiques en utilisant la thermodynamique classique ou la thermodynamique en temps fini. En l'absence de régénérateur (**e = 0**), ce qui représente le pire des cas pour l'efficacité du cycle du moteur Stirling. L'efficacité thermique serait alors:

$$E_t = T_3 - T_1 / [T_3 + (T_3 - T_1)/(k-1)\ln(\frac{V_1}{V_2})] \qquad (31)$$

On remarque que les équations (30) et (31) sont identiques en l'absence de volumes morts.
Si maintenant nous disposions du régénérateur parfait e = 1 et d'une absence totale de volumes morts, ce qui serait idéal pour un moteur Stirling, l'efficacité thermique serait:

$$E_t = \frac{T_3 - T_1}{T_3} \qquad (32)$$

<u>Ce qui nous fait dire que le cycle de Stirling possède l'efficacité du cycle de Carnot opérant entre deux sources thermiques</u> T_3 *et* T_1 <u>respectives</u>.

Il est maintenant évident qu'en théorie, le moteur Stirling peut être une machine très rentable pour convertir de la chaleur en travail mécanique. L'efficacité d'une conception et d'une fabrication qui exclurait les volumes morts tout en incluant un régénérateur quasi-parfait équivaudrait à réaliser une machine de Carnot. Autrement dit ce serait la réalisation du moteur thermique le plus efficace qu'il soit en termes de rendement énergétique.

Mise en pratique:

Muni de nos belles formules, nous allons examiner les effets des volumes morts et l'effet de l'efficacité du régénérateur sur un moteur Stirling « réel » non pressurisé. Nous allons prendre un taux de compression optimisé que nous appellerons C_t égal à $(\frac{V_D}{T_3})*T1$ pour cet exemple, les paramètres initiaux de notre moteur seront les suivants:

Température chaude:	T_3 = 923 K (650 °C).
Température froide:	T_1 = 338 K (65 °C).
Volume de gaz déplacé par le piston de travail:	V_P = 27 464 cc (optimisé)
Volume de gaz déplacé par le déplaceur avec	V_D = 75000cc C_t = 0.366
Volume mort morts côté chaud	V_{Mc} = 200 cc
Volume mort du régénérateur	V_{Mr} = 250 cc
Volume mort côté froid	V_{Mf} = 150 cc

La procédure de calcul d'un moteur Stirling imparfait peut maintenant être réalisée comme suit:

De l'équation (7a) pour une température du gaz de travail maintenu à T_3 = 923 K et à T_1 = 338 K, la température effective du régénérateur est:

$$T_R=\frac{T_3+T_1}{2} = 630{,}5 \text{ K}$$

Le volume des cylindres seront:

$V_{f1} = V_{c4} = V_D+V_P$ = 75 000 + 27 464 = 102 464 cc = 0,102 m^3 .
$V_{f2} = V_{c3} = V_D$ = 75 000 cc = 0,075 m^3
$V_{c1} = V_{f4} = 0$ (la totalité du gaz étant de l'autre côté)

Occupons nous maintenant des volumes morts. Le volume mort total contenu dans le moteur $V_{MT}=V_{Mc}+V_{Mr}+V_{Mf}$ = 200 + 250 + 150 = 600 cc = 6.0E-4 m^3

De l'équation (4) le rapport des volumes morts sur les volumes balayés est:

$$k_{MDP} = \frac{V_{MT}}{V_D+V_P} = 0.005855 \qquad (33)$$

Le rapport des volumes morts sur le volume total est:

$$k_{MT} = \frac{k_{MDP}}{1+k_{MDP}} = 0.005890 \qquad (34)$$

Voyons maintenant le rapport de chacun des volumes morts sur le volume mort total suivant l'équation (2)

$$K_{Mc} = \frac{V_{Mc}}{V_{MT}} = 0{,}333 \tag{35}$$

$$K_{Mr} = \frac{V_{Mr}}{V_{MT}} = 0{,}416 \tag{36}$$

$$K_{Mf} = \frac{V_{M}}{V_{MT}} = 0{,}250 \tag{37}$$

de l'équation (9) le facteur K sera donc:

$$K = \left(\frac{V_{Mc}}{T_3}\right) + \left(\frac{V_{Mr}}{T_R}\right) + \left(\frac{V_{Mf}}{T_1}\right) \; = \; 6.2216\,E-7 \tag{38}$$

les produits du facteur K sur les températures du refroidisseur et du réchauffeur seront:

$$K_{T1} \; = K * T_1 \; = 1.9473\,E-4 \tag{39}$$
$$K_{T3} \; = K * T_3 \; = 9.7559\,E-4 \tag{40}$$

Remplissons notre moteur avec de l'air à pression atmosphérique. Comme il n'est pas établis de position de remplissage normalisé nous choisissons de placer notre moteur en position 3. Le volume correspond alors au volume total maximum. $V_T \; = \; V_D + V_P + V_{MT}$. La température de remplissage étant fixée à 20 ° C (293.0 K) , elle est valable pour les trois volumes.

Donc :

$$m \; = \; \left(\frac{p}{R}\right)\left(\frac{V_T}{293{,}0}\right) \; = \; \left(\frac{101400}{293}\right)\left(\frac{0.1030}{293}\right) \; = \; 0.124279 \;\; kg \tag{41}$$

Nous allons maintenant calculer les différentes transitions d'état pour un cycle complet en tenant compte de l'efficacité du régénérateur, fixé arbitrairement à 75% (e = 0,75), et des volumes morts présents.

De l'équation (10) , le travail de compression isotherme1-2 est:

$$W_{1-2}=mRT_1\ln([\frac{V_D+KT_1}{V_D+V_P+KT_1}]) \quad = \quad -3746.4662 \text{ Joules} \qquad (42)$$

De l'équation (14) le travail d'expansion isotherme 3-4 est:

$$W_{3-4}=mRT_3\ln([\frac{V_D+V_P+KT_3}{V_D+KT_3}]) \quad = 10159.0883 \text{ Joules} \qquad (43)$$

Nous savons que le travail fournit par le moteur est la somme de ces deux derniers résultats. Les deux autres transformation nous servant à calculer le rendement énergétique de notre moteur.

$$W_{net} \;=\; W_1-2+W_3-4 \;=\; 6412.6220 \text{ Joules} \qquad (44)$$

Cependant si nous utilisons la formule (24a) pour calculer ce travail le résultat est identique à la somme évoquée plus haut.

$$W_{net}=mR\{T_3\ln([\frac{V_D+V_P+KT_3}{V_D+KT_3}]-T_1\ln([\frac{V_D+V_P+KT_1}{V_D+KT_1}]))\} \qquad (45)$$

Calculons le rendement énergétique des deux isochores en tenant compte de l'efficacité du régénérateur. Est il besoin de rappeler que C_v représente la Chaleur spécifique à volume constant (J/Kg K). Sa valeur est de 718 pour l'air.

Il est bon de connaître maintenant les températures de sortie du régénérateur 1' et 3', dépendantes de l'efficacité du régénérateur définit par e. Nous utilisons les formules (5a) et (6).

$$T_1'=T_3+e(T_1-T_3) \; = 484.25 \text{ K} \qquad (46)$$

$$T_3'=T_1+e(T_3-T_1) \; = 776.75 \text{ K} \qquad (47)$$

Le chauffage isochore 2-3 est la sommes des chaleurs apportées par le régénérateur et par celle apportée depuis une source extérieure.

De l'équation (11) la chaleur totale apportée pendant cette transformation est:

$$Q_{2-3} = mC_V(T_3 - T_1) \;=\; 52201.0291 \text{ Joules} \qquad (48)$$

De l'équation (13) la chaleur apportée depuis une source extérieure pendant la transformation 3'-3 est:

$$Q_{3-3'} = (1-e)\,mC_V(T_3 - T_1) \;=\; 13050.257 \text{ Joules} \qquad (49)$$

Le refroidissement isochore 4-1 est la somme de la chaleur rejetée dans le régénérateur et celle extraite vers le milieu extérieur.

En se servant de l'équation (15) cela nous donne:

$$Q_{4-1} = mC_V(T_1 - T_3) \;=\; -52201.0291 \text{ Joules} \qquad (50)$$

De l'équation (17) la chaleur extraite vers le milieu extérieur pendant la transformation 1-1' est:

$$Q_{1-1'} = mC_V(T_1 - T_{1'}) \;=\; -13050.2572 \text{ joules} \qquad (51)$$

La formule (18) nous dit que l'énergie totale apportée correspond à :

$$Q_e \;=\; Q_{3-3'} + Q_{3-4} \;=\; 13050.257 + 10159.088 \;=\; 193411.2135 \text{ Joules}$$

Celle rejetée se calcule suivant la formule (22) :

$$Q_s \;=\; Q_{4-1} + Q_{1-2} \;=\; -52201.0291 + -3746.4662 \;=\; -139972.6961 \text{ Joules}$$

Le travail net par cycle , que nous avons déjà calculé, peut aussi être vue comme la somme de Q_e et de Q_s . (54)

L'efficacité thermique de notre moteur s'obtient avec la formule (29)

$$E_t \;=\; \frac{W_{net}}{Q_e} \;=\; \frac{6412.622}{193411.2135} \;=\; 0.2762 \qquad (55)$$

L'efficacité de Carnot suivant la formule (33) est de 0.6338 ce qui montre que nous pouvons encore améliorer notre moteur.

Pour obtenir la pression aux quatre « coins » du moteur le plus simple est de procéder ainsi.

Calculons la pression sur le point 1 du diagramme P V.

Le volume est égal à $V_D + V_P + V_{Mt}$ et la température égale à T_1 la pression est alors :

$$P_1 = R * T_1 * \left(\frac{\left(\frac{1}{V_D + VP + V_{Mt}} \right)}{m} \right) \quad / \text{E-5} = 1.16973 \text{ kg / cm}^2 \qquad (56)$$

Le point 2 maintenant :

$$P_2 = R * T_1 * \left(\frac{\left(\frac{1}{V_D + V_{Mt}} \right)}{m} \right) \quad / \text{E-5} = 1.5946 \text{ kg / cm}^2 \qquad (57)$$

Le point 3:

$$P_3 = R * T_3 * \left(\frac{\left(\frac{1}{V_D + V_{Mt}} \right)}{m} \right) \quad / \text{E-5} = 4.3547 \text{ kg / cm}^2 \qquad (58)$$

et enfin le point 4:

$$P_4 = R * T_3 * \left(\frac{\left(\frac{1}{V_D + VP + V_{Mt}} \right)}{m} \right) \quad / \text{E-5} = 3.19427 \text{ kg / cm}^2 \qquad (59)$$

La pression effective moyenne s'obtient ici en faisant la moyenne de ces 4 pressions.

Cela nous donne 2.57835 kg / cm². (remplissage à 1.014 kg / cm²). (60)

En conclusion:

De cette étude nous pouvons conclure ceci:

1. Pour un moteur Stirling avec un volume mort donné, un régénérateur inefficace n'affectera pas le travail effectif si la température effective du régénérateur est une moyenne arithmétique des températures extrêmes du gaz de travail. Cependant un moteur Stirling muni d'un mauvais régénérateur demandera plus de chaleur et nécessitera un meilleur refroidissement que si il était équipé d'un régénérateur efficace.
2. Les volumes morts vont dégrader à la fois l'efficacité énergétique et augmenteront les apports de chaleurs externes. Notons que la construction d'un moteur Stirling entraîne fatalement la présence de volumes morts incontournables.
3. Un faible travail mécanique peut quand même être obtenu si le moteur contient un taux de volumes morts importants.
4. Pour atteindre de hautes performances , un moteur Stirling doit être équipé du régénérateur le plus efficace qu'il soit. Si ce n'était pas le cas, il vaut mieux ne pas avoir de régénérateur du tout. Ce qui nous fait l'économie de son volume mort.

Serge Klutchenko.